

## ANEXO B

# Discos de acreção de matéria geometricamente finos

### B.1 Formação de um disco de acreção

Consideremos um sistema binário formado por uma estrela normal e um buraco negro. Se a distância entre ambos for relativamente pequena então estamos perante aquilo a que chamamos um binário próximo. Alguma matéria da estrela pode transitar para a esfera de influência do buraco negro, principalmente se esta tiver atingido a sua fase de gigante vermelha.

A matéria que flui da estrela normal para o buraco negro tem um considerável momento angular, o que previne a queda livre dessa matéria em direcção ao horizonte de acontecimentos, e portanto não deverá ocorrer acreção esférica. Este argumento é particularmente válido quando o momento angular por unidade de massa excede  $r_1c$ , onde  $r_1$  é a órbita circular estável mais interior (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983). Nestas circunstâncias a força centrífuga é comparável à força gravítica e a matéria é obrigada a efectuar órbitas em torno do buraco negro.

Ao descreverem essas órbitas as partículas colidem entre si libertando energia cinética e energia interna. Como o momento angular é retido as partículas acabam por descrever órbitas circulares pois estas são as órbitas de menor energia para um dado valor de momento angular. Por outro lado as partículas acabam por cair para um plano orbital comum pois órbitas circulares com diversas inclinações fomentam as colisões entre partículas. Forma-se assim um disco de acreção de matéria em torno do buraco negro.

Se colocarmos uma partícula numa órbita circular em torno de um corpo gravitante ela ficará nessa órbita. A extracção de energia e momento angular dessa partícula requer um movimento radial descendente.

A energia radiada por unidade de massa desde a periferia do disco até ao horizonte de acontecimentos é igual à energia de ligação gravitacional, por unidade de massa, da

órbita circular estável mais interior. No caso de um buraco negro de Schwarzschild a energia radiada corresponde a 5.72% da massa da partícula (Secção 1.2.4). No caso de um buraco negro de Kerr a eficiência do processo é superior, podendo ir até aos 42% se o buraco negro for extremo e o disco rodar no mesmo sentido. Estamos a supor que pouca ou nenhuma energia é radiada entre  $r_i$ , onde se situa o limite interior do disco, e o horizonte de acontecimentos.

Os valores apresentados anteriormente revelam a acreção de matéria por um buraco negro como um processo muito eficiente de converter massa em radiação. No entanto esta conversão só é possível se existirem paralelamente mecanismos, igualmente eficientes, que transportem o momento angular da partícula para o exterior. Em meios gasosos, como são os discos de acreção, esses mecanismos assentam numa redistribuição de momento angular entre partículas, possibilitando a queda de algumas delas em direcção ao interior à custa de outras que se deslocam mais para o exterior. A identificação e descrição detalhada desses mecanismos de redistribuição está longe de ser trivial. As hipóteses mais plausíveis assentam na viscosidade turbulenta e na presença de campos magnéticos.

## B.2 Dinâmica geral do disco

Vamos considerar apenas discos Keplerianos, ou seja, discos cuja massa não contribui significativamente para o campo gravítico (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983). A velocidade orbital das partículas de gás no disco é dada por:

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{d\Phi}{dr}$$

onde  $\Phi$  é o potencial gravítico Newtoniano devido à massa  $M$  do buraco negro. Temos então:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

ao que corresponde a velocidade angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (\text{B.1})$$

Uma vez que  $\omega = \omega(r)$  concluímos que a rotação do disco deve ser diferencial (com as partes mais interiores a rodarem mais depressa) e que deverá existir uma taxa de shearing  $A$  não nula (Pringle 1981):

$$A = r \frac{d\omega}{dr}$$

A fricção entre partículas de gás pertencentes a anéis adjacentes resulta na dissipação de energia, do movimento do fluído, sob a forma de calor que é depois radiado para longe. Como a única fonte de energia responsável pelo movimento é o potencial gravitacional, da massa central, então o gás deverá cair sucessivamente para dentro do poço de potencial. Além desta viscosidade molecular existem outros mecanismos que conduzem ao mesmo resultado de uma forma mais eficiente.

Embora o movimento das partículas de gás no disco seja predominantemente circular, existe também uma componente na direcção radial. As partículas descrevem espirais bastante apertadas à medida que se aproximam do limite interior do disco.

O maior tempo que o gás permanece do lado de fora do horizonte de acontecimentos e o aquecimento a que está sujeito fazem da acreção por disco um processo muito mais energético do que a acreção esférica.

A maior parte da radiação emitida por um disco de acreção é proveniente das zonas mais interiores. A reposição de matéria ocorre nas zonas mais exteriores pelo ponto de Lagrange  $L_1$  (Figura 1.14). Algum deste gás pode abandonar o binário pelo ponto de Lagrange  $L_2$  ou mesmo voltar à estrela normal via  $L_1$ . O resto fica sob a influência do buraco negro passando a fazer parte integrante do disco.

## B.3 Viscosidade

Um dos principais problemas na elaboração de uma teoria dos discos de acreção reside na descrição da viscosidade responsável pelo torque que remove o momento angular para o exterior. A viscosidade governa a estrutura local do disco bem como a escala do tempo no qual o disco evolui. Dada uma viscosidade e um processo radiactivo podemos construir um modelo de disco de acreção. A incerteza está na natureza e magnitude dessa viscosidade. Muitas vezes supõe-se que o torque é produzido por viscosidade local de carácter não especificado e cuja magnitude é avaliada por meras análises dimensionais.

O tipo de viscosidade mais simples consiste na fricção entre partículas adjacentes do fluido que se movem com velocidades distintas. Sabemos que este tipo de viscosidade está presente nos discos de acreção pois os mesmos apresentam uma rotação diferencial. É a chamada viscosidade atômica ou molecular.

Se pensarmos que a escala de qualquer stress hidrodinâmico é a pressão  $p$ , então faz sentido considerar que o stress viscoso é da forma  $\alpha p$ , onde  $\alpha$  é o chamado parâmetro adimensional para a viscosidade e cujo valor pode ir até a ordem da unidade (e.g. Shakura & Sunyaev 1973). No caso da viscosidade molecular o valor de  $\alpha$  é pequeno o que significa que este tipo de viscosidade não é suficientemente forte para que se produzam resultados significativos (e.g. Pringle 1981).

Uma forma de  $\alpha$  assumir um valor razoável reside na existência de turbulência no disco. Um fluido turbulento é caracterizado pela formação de remoinhos que podem ser grandes ou pequenos (e.g. Landau & Lifshitz 1987). Os remoinhos grandes constituem a estrutura fundamental da turbulência. Neles a viscosidade é praticamente nula. Por seu turno os remoinhos pequenos são autênticos dissipadores da energia que recebem dos grandes. Nestes a viscosidade é alta. Assim, no caso de um fluido turbulento teríamos, para a viscosidade, a expressão:

$$\nu_{\text{turb}} \approx v_{\text{turb}} l_{\text{turb}}$$

onde  $v_{\text{turb}}$  é a velocidade característica dos remoinhos turbulentos e  $l_{\text{turb}}$  o tamanho característico dos remoinhos maiores. Atendendo a que a turbulência supersónica desaparece rapidamente à medida que a sua energia é dissipada em choques, então

esperamos que  $v_{\text{turb}}$  seja uma velocidade subsónica. Por outro lado  $l_{\text{turb}}$  deve ser inferior à altura do disco. Podemos então escrever:

$$v_{\text{turb}} \cong ah$$

onde  $a$  é a velocidade local do som e  $h$  a meia altura do disco. Daqui por diante utilizaremos apenas  $v$ , com o significado de  $v_{\text{turb}}$ .

Embora a hipótese do disco turbulento venha resolver o problema da magnitude da viscosidade, introduz um novo problema. De facto não existe nenhuma razão óbvia segundo a qual o disco deva ser turbulento. O critério de estabilidade de Rayleigh para discos de acreção (e.g. Pringle 1981):

$$\frac{d}{dr}(r^2\omega) > 0$$

é amplamente satisfeito por muitos potenciais, incluindo o Kepleriano.

As partículas de gás num disco de acreção estão sujeitas a movimentos verticais, radiais e circulares. No caso de um disco fino, como estamos a considerar, o movimento vertical das partículas é praticamente inexistente se comparado com o respectivo movimento radial e este por sua vez é muito pouco significativo se comparado com o movimento circular. Isto significa, em termos de componentes da velocidade, que:

$$v_z \ll v_r \ll v_\phi$$

Temos assim que a única componente essencial da velocidade é  $v_\phi$  e que a única componente não desprezável do tensor do stress viscoso é  $T_{r\phi}$ , que neste caso fica (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983):

$$T_{r\phi} = T_{\phi r} = \eta \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = -\frac{3}{2} \eta \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (\text{B.2})$$

ou ainda:

$$T_{r\phi} = -\frac{3}{2}\eta\omega \quad (\text{B.3})$$

onde  $\eta$  é o coeficiente da viscosidade dinâmica. O elemento  $T_{r\phi}$  traduz o transporte da componente  $r$  do momento angular por unidade de tempo através da área unitária cujo vector normal fica na direcção  $\phi$ .

O torque entre dois anéis do disco adjacentes é dado por (e.g. Krolik 1999):

$$G = \int r d\phi \int r T_{r\phi} dz = 2\pi r^3 v \Sigma \frac{\partial\omega}{\partial r} \quad (\text{B.4})$$

onde estamos a considerar para  $v$  e para a densidade superficial de matéria  $\Sigma$  os respectivos valores médios azimutais e verticais. Se  $\partial\omega/\partial r < 0$  então  $G < 0$  (pois é sempre  $r^3 v \Sigma > 0$ ) o que significa que o momento angular está a ser transferido para o exterior.

Além da viscosidade usual, foram sugeridos outros mecanismos capazes de explicar o torque, nomeadamente mecanismos baseados em campos magnéticos. A existência de campos magnéticos nos discos de acreção é muito plausível, pois, como estes existem nas estrelas, então também devem existir na matéria acretada. Estão neste caso mecanismos baseados no stress electromagnético, em ventos magnetizados e na chamada instabilidade de Velikhov-Chandrasekhar-Balbus-Hawley (e.g. Krolik 1999).

## B.4 Densidade superficial de matéria

A distribuição de matéria num disco de acreção pode ser descrita, como é usual, pela densidade volúmica  $\rho(r, \phi, z)$ . Se o disco for geometricamente fino e azimutalmente simétrico a distribuição de matéria é apenas função da coordenada radial  $r$ . Podemos substituir a densidade volúmica  $\rho$  pela densidade superficial  $\Sigma$  definida como se segue (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983):

$$\Sigma(r) = \int_{-h}^h \rho(r, z) dz$$

onde  $h$  é a meia-altura do disco. No caso de um disco fino, onde  $\rho$  praticamente não varia com  $z$ , podemos escrever:

$$\Sigma(r) = 2h\rho \quad (\text{B.5})$$

A equação da continuidade para um disco, onde não existem fontes ou sumidouros de matéria no seu interior, pode ser escrita como se segue (e.g. Krolik 1999):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0 \quad (\text{B.6})$$

onde  $v_r$  é a velocidade radial ( $v_r < 0$  para movimentos dirigidos para o centro).

Existe também uma equação da continuidade para a componente axial do momento angular. Esta equação, que é o análogo da equação de Navier-Stokes, tem a forma (e.g. Krolik 1999):

$$\frac{\partial}{\partial t} (r^2 \Sigma \omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \Sigma \omega v_r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial G}{\partial r} \quad (\text{B.7})$$

onde  $G$  é o momento da força entre anéis adjacentes. Se não existir transferência de momento angular entre anéis adjacentes então  $G=0$  e temos conservação de momento angular no anel.

O passo seguinte será determinar a dependência temporal de  $\Sigma$ . Para isso temos de escolher um processo responsável pelo torque. Vamos escolher, por exemplo, a viscosidade turbulenta pelo que  $G$  será dado por (B.4). Substituindo  $G$  em (B.7) e tomando também a equação da continuidade (B.6), podemos determinar a velocidade radial (e.g. Krolik 1999):

$$v_r = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 v \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)}{r \Sigma \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega)}$$

Utilizando esta expressão para  $v_r$  podemos combinar as equações da conservação da massa (B.6) e da conservação do momento angular (B.7) numa única equação. Substituindo, nessa equação, a velocidade angular  $\omega$  por (B.1) resulta (e.g. Pringle 1981):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (v \Sigma \sqrt{r}) \right]$$

A solução para  $\Sigma$  depende muito da forma de  $v$ . A solução geral para um disco que se estende desde a origem até ao infinito e com torque nulo na origem é (e.g. Pringle 1981):

$$\Sigma(r, t) = 12^{1/4} (rv)^{-3/4} \int_0^{\infty} f(\lambda) e^{-\lambda^2 t} J_{1/4} \left( \frac{r\lambda}{\sqrt{3v}} \right) \left( \frac{r\lambda}{\sqrt{3v}} \right)^{1/4} d\lambda$$

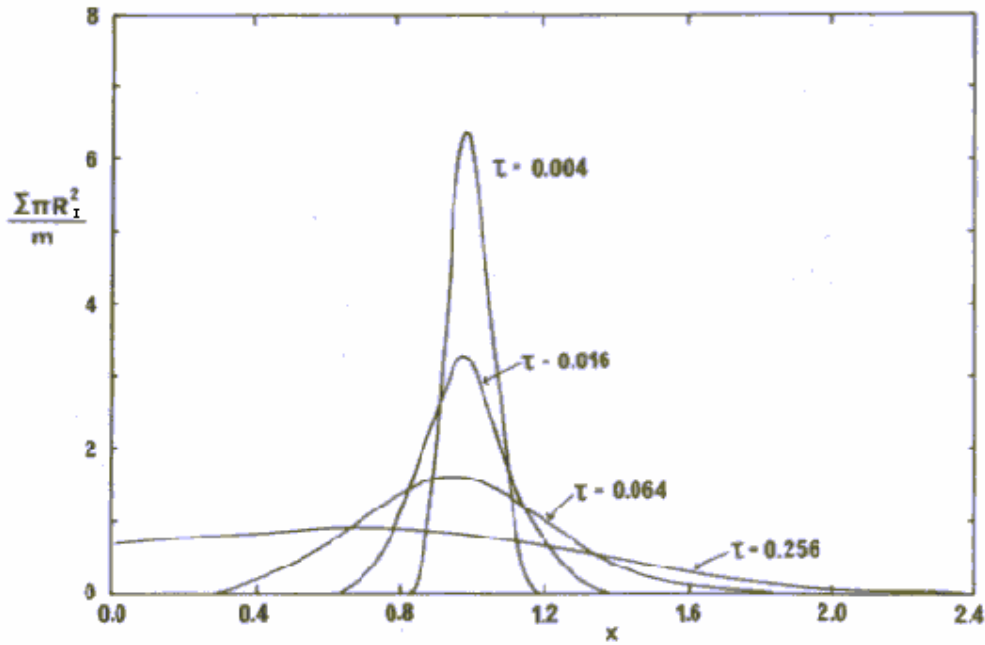
onde  $f(\lambda)$  é uma função arbitrária que depende das condições iniciais e  $J_{1/4}$  é a função ordinária de Bessel de ordem 1/4. Embora não seja exactamente este o cenário para um disco de acreção em torno de um buraco negro podemos tirar algumas conclusões. Na Figura B.1 estão representadas as curvas típicas da função  $\Sigma$  para vários instantes.

Verifica-se que a viscosidade tende a espalhar o gás contido no disco. Grande parte da matéria move-se para o interior perdendo energia e momento angular. Alguma matéria move-se para o exterior de forma a tomar o momento angular perdido pela primeira. Numa situação extrema toda a massa do disco acabaria na origem e todo o momento angular no infinito.

## B.5 A altura do disco

Um disco de acreção diz-se fino, quando a respectiva (meia) altura  $h$  é sempre muito inferior ao raio de qualquer parte do disco. Se  $r_i$  for o raio do limite interior do disco, que corresponde à última órbita circular estável, então, num disco fino, é sempre  $h \ll r_i$ . No caso geral é  $h = h(r)$ . No entanto se a dependência de  $r$  não for muito





**Figura B.1** - Evolução no tempo da densidade superficial de matéria, de um disco de acreção, em função de  $x=r/r_1$  (adaptado de Pringle 1981).

acentuada podemos considerar que  $h$  é constante. Num disco fino a temperatura do mesmo é relativamente baixa. O calor produzido pelo stress viscoso não é armazenado no disco mas sim radiado com grande eficiência. A acreção por disco fino deverá assim ser altamente não adiabática.

Se a luminosidade do disco for da ordem do limite crítico de Eddington,  $L_E$ , então a força de pressão de radiação é comparável à gravidade e nesse caso a altura do disco poderá não ser desprezável. Quando a luminosidade do disco é muito inferior a  $L_E$  então a pressão de radiação não consegue suportar a matéria muito acima do plano do disco. Temos nesse caso um disco fino.

Consideremos um referencial que acompanhe a velocidade orbital do disco,  $v_{orb}$ , para um dado raio  $r$ . Nesse referencial os átomos de gás têm velocidades aleatórias, da ordem da velocidade do som no meio  $a$ . Se atendermos a que a componente vertical da aceleração gravítica é, no caso de um disco fino, dada por (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983):

$$a_z = \frac{GM}{r^2} \frac{z}{r} \quad \text{com } z \ll r$$

podemos inferir que a altura típica que um átomo pode atingir acima do plano do disco, que é um valor indicativo da altura do disco, é da forma (e.g. Krolik 1999):

$$h \propto r \frac{a}{v_{\text{orb}}} \quad (\text{B.8})$$

Temos assim que, a relação entre a altura do disco  $h$  e o raio  $r$  é, grosso modo, igual à relação entre a velocidade do som no gás e a respectiva velocidade orbital. O critério a impor à temperatura para que o disco seja fino é o seguinte (e.g. Krolik 1999):

$$\frac{kT}{\mu c^2} \frac{r}{r_s} \ll 1$$

onde  $\mu$  é a massa média por partícula de gás. Se  $T$  não satisfizer esta relação então existe a tendência para a expansão do disco em altura, deixando assim de ser fino. Note-se que (B.8) permite-nos escrever o stress viscoso (B.2) como se segue:

$$T_{r\phi} \propto -\rho v_s^2 \frac{v_t}{v_s}$$

## B.6 Estrutura radial

Admitindo que existe *qualquer coisa* responsável pelo torque, capaz de remover de forma eficiente o momento angular, vamos centrar a nossa atenção no caso dos discos não dependentes do tempo.

Como acontece em qualquer sistema dinâmico, a estrutura de um disco de acreção é determinada pelas equações de conservação da massa, momento e energia. No caso não dependente do tempo estas adquirem uma forma relativamente simples. Como estamos a considerar discos azimutalmente simétricos, cujas propriedades são verticalmente integráveis, a única variação espacial de interesse é na direcção radial e a única componente do momento com interesse é aquela que corresponde à direcção

vertical. A conservação de energia pode ser escrita numa equação separada desde que se assuma que qualquer calor gerado por dissipação é radiado localmente.

Como estamos a considerar um regime não dependente do tempo a integração da equação da continuidade (B.6) é imediata, conduzindo a uma constante:

$$C = r\Sigma v_r \quad (\text{B.9})$$

Verifica-se que esta constante tem as dimensões  $\text{kgs}^{-1}$ , ou seja, corresponde a uma taxa de acreção. Podemos então escrever (e.g. Krolik 1999):

$$\frac{dM}{dt} = 2\pi r\Sigma v_r$$

O valor de  $dM/dt$  corresponde à massa que atravessa, por unidade de tempo, um anel (cilindro) de raio  $r$  no disco de acreção. Este valor não depende explicitamente de  $r$  como fica patente pela equação da continuidade. Substituindo (B.9) na equação da conservação do momento angular (B.7) e integrando resulta (e.g. Krolik 1999):

$$\frac{dM}{dt} \frac{\omega(r)}{2\pi} + \frac{C}{2\pi r^2} = -\int W_{r\phi} dz \quad (\text{B.10})$$

onde  $W_{r\phi}$  representa o stress total no disco (soma do stress viscoso com o stress electromagnético). A constante de integração  $C$  é avaliada para um raio onde o stress no disco seja nulo. No caso de um buraco negro esse raio é  $r_I$ . De facto o stress é nulo para  $r_I$ , pois é a partir desse raio que o material cai para o interior, afastando-se do disco. Temos então para  $C$  a expressão (e.g. Krolik 1999):

$$C = -r_I^2 \omega(r_I) \frac{dM}{dt}$$

Verifica-se que  $C$  corresponde ao fluxo constante de momento angular no disco. O sinal negativo indica que o momento é extraído ao disco. Podemos escrever (B.10) na forma (e.g. Krolik 1999):

$$\frac{dM}{dt} \frac{\omega(r)}{2\pi} X(r) = - \int W_{r\phi} dz$$

onde o factor de redução  $X(r)$  é dado por:

$$X(r) = 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \frac{\omega(r_1)}{\omega(r)}$$

o que no caso de um potencial kepleriano fica:

$$X(r) = 1 - \sqrt{\frac{r_1}{r}} \quad (\text{B.11})$$

É importante notar que o factor de redução é máximo para  $r=r_1$ .

No caso de um stress puramente viscoso ( $W_{r\phi} = T_{r\phi}$ ) resulta, com a ajuda de (B.2), a seguinte relação (e.g. Pringle 1981):

$$v\Sigma = \frac{1}{3\pi} \frac{dM}{dt} X(r) \quad (\text{B.12})$$

## B.7 Dissipação de energia no disco

Se assumirmos que o torque responsável pela remoção do momento angular é essencialmente viscoso, então a taxa local de dissipação de energia por unidade de volume é proporcional ao shear local (e.g. Krolik 1999) podendo ser escrita como:

$$Q_v = \rho v \left( -\frac{3}{2} \omega \right)^2$$

Tendo ainda em conta a aproximação do disco fino, podemos integrar a equação anterior na vertical. Na prática isso equivale a multiplicar ambos os membros por  $2h$ .

Se, além disso, substituirmos  $2hQ_v$  por  $Q$ , onde  $Q$  é a taxa de dissipação de energia por unidade de área (incluindo as duas faces do disco), vem:

$$Q = 2h\rho v \left( -\frac{3}{2}\omega \right)^2$$

Tendo em conta (B.5) vem:

$$Q = \Sigma v \left( -\frac{3}{2}\omega \right)^2 \quad (\text{B.13})$$

Se atendermos ainda a que, no caso de um potencial kepleriano, o shear é dado por:

$$A = r \frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{3}{2}\omega$$

vem que:

$$Q = \Sigma v A^2$$

Este último resultado ilustra a dependência da taxa de dissipação relativamente ao shear no caso de um torque essencialmente viscoso. Substituindo (B.12) e (B.1) em (B.13) vem (e.g. Krolik 1999):

$$Q = \frac{3GM}{4\pi r^3} \frac{dM}{dt} X(r) \quad (\text{B.14})$$

Este resultado ilustra a simplicidade dos discos de acreção não dependentes do tempo. A fonte de maior incerteza, a viscosidade, desapareceu. No entanto isso resulta do facto de estarmos a considerar que é a viscosidade a responsável pelo fluxo de matéria.

A taxa de dissipação é máxima quando a primeira derivada de  $Q$ , com respeito a  $r$ , se anula. Isso acontece para:

$$r = \frac{49}{36} r_1 \approx 1.36 r_1$$

A taxa de dissipação é, portanto, máxima ainda antes de ser atingido o limite interior do disco. De facto ao atingir  $r_1$  a dissipação deve cair para zero pois nesse ponto o shear torna-se nulo.

## B.8 Luminosidade do disco

Se assumirmos que todo o calor dissipado é radiado (o que nem sempre se verifica) então a luminosidade total do disco é dada por:

$$L = \int_{r_1}^{r_E} Q 2\pi r dr \quad (\text{B.15})$$

Note-se que a luminosidade de apenas uma das faces do disco corresponde à metade do valor dado por esta expressão. Vamos avaliar (B.15) para uma secção anelar do disco, compreendida entre  $r_1$  e  $r_2$ , com  $r_2 > r_1 \gg r_g$  (de modo a ser  $X(r) \approx 1$ ). Obtemos (e.g. Krolik 1999):

$$L(r_1, r_2) = \frac{3GM}{2} \frac{dM}{dt} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Verifica-se que a energia radiada nesta região é 3 vezes superior à energia potencial gravítica perdida pela matéria em acreção nessa mesma região. De onde vem essa energia extra? A resposta é simples: trata-se de alguma energia potencial gravítica libertada em secções mais interiores do disco e que é transportada para o exterior, acompanhando a transferência de momento angular. Como já foi referido anteriormente,

a remoção de momento angular, permitindo a queda de algumas partículas para o interior, implica um alargamento do disco.

Não existe contudo qualquer problema quando integramos (B.15) para todo o disco. Assim, tendo em conta (B.11) obtemos (e.g. Krolik 1999):

$$L = \frac{1}{2} \frac{GM}{r_1} \frac{dM}{dt}$$

Este último resultado levanta uma segunda questão. Porque é que a perda total de calor pelo disco é inferior (é metade) à perda total de energia potencial gravítica? Acontece que quando a matéria cai definitivamente em direcção ao centro, deixando para trás o limite interior do disco, leva consigo alguma energia cinética. Esta energia é justamente igual à metade da energia do potencial Kepleriano que fica assim indisponível para radiação. No entanto, no caso de um disco de acreção para um buraco negro, 1/2 não é o factor correcto. Há que entrar com correcções relativistas.

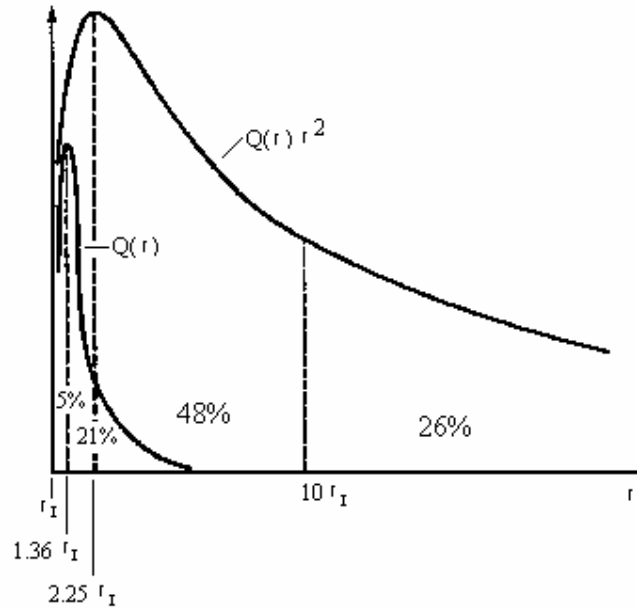
O raio para o qual a luminosidade é máxima corresponde ao máximo da função  $Qr^2$  e tem o valor:

$$r_{L_{\max}} = \frac{9}{4} r_1 = 2.25r_1$$

Verifica-se que a parte mais luminosa do disco, embora se situe na zona mais interior do mesmo, fica aquém de  $r_l$ . No gráfico da Figura B.2 estão representadas as funções  $Q(r)$  e  $L(r)$ . São também indicadas as contribuições de algumas regiões para a luminosidade total do disco.

## B.9 Partição do disco

Um disco de acreção pode ser dividido em várias zonas anelares, cada qual com características bem distintas. De acordo com Shakura & Sunyaev (1973) temos as regiões:



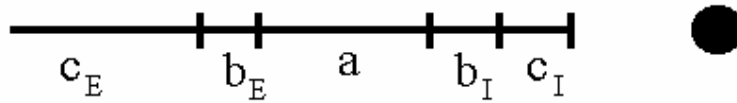
**Figura B.2** - Taxa de dissipação de energia  $Q(r)$ , no disco, por unidade de área e luminosidade  $Q(r)r^2$ . As percentagens ilustram as contribuições de cada uma das regiões demarcadas para a luminosidade integral do disco (adaptado Shakura & Sunyaev 1973).

- a- A pressão da radiação é dominante. Na interacção matéria-radiação é dominante a dispersão de electrões livres.
- b- A pressão do gás é dominante. Na interacção matéria-radiação a dispersão electrónica também desempenha aqui o papel principal.
- c- A opacidade aqui é determinada pela absorção livre-livre e outros mecanismos menos relevantes.

Num disco de acreção existem duas regiões  $c$ . Uma região  $c_I$ , bastante estreita, junto ao limite interior do disco, e outra  $c_E$ , bastante extensa, junto ao limite exterior do disco. Na região  $c_I$  a pressão da radiação é dominante e na região  $c_E$  é a pressão do gás que domina. Duas regiões do tipo  $b$  fazem a interface entre as regiões  $c$  e a região  $a$ . Esta partição do disco está esquematizada na Figura B.3.

Expressões para a densidade média de energia, densidade superficial de matéria, densidade bariónica, velocidade radial, campo magnético e temperatura para cada uma das diferentes regiões podem encontrar-se em Shakura & Sunyaev (1973). Analisando





**Figura B.3** - Partição radial do disco de acreção (note-se que a figura é apenas ilustrativa e não respeita qualquer escala)

essas expressões é notória, para qualquer uma das regiões, uma fraca dependência da espessura do disco em relação à eficiência  $\alpha$  do mecanismo de remoção de momento angular. Quando  $\alpha$  decresce, a densidade superficial do disco aumenta rapidamente e a velocidade radial do movimento das partículas decai, aumentando a espessura do disco como  $\alpha^{-1/10}$ . No entanto se  $\alpha$  decrescer para valores da ordem de:

$$\alpha \approx 10^{-15} \left( \frac{dM}{dt} \right)^2$$

a espessura do disco será comparável ao raio do mesmo. Nesse caso deixaríamos de ter um disco de acreção para termos simplesmente acreção esférica.

## B.10 Estrutura vertical e temperatura

Existem dois processos que determinam a estrutura vertical do disco: difusão de calor e balanço entre a força de gravidade e a pressão da radiação e/ou do gás. Atendendo a que estamos a considerar que o movimento vertical das partículas de gás é muito pouco significativo, se comparado com os respectivos movimentos radial e orbital, vamos admitir a existência de equilíbrio hidrostático na direcção vertical. Isto significa que na direcção do eixo  $z$  o gradiente de pressão deve ser completamente equilibrado pela componente da aceleração gravítica normal ao plano do disco,  $g_z$ . A equação que traduz tal equilíbrio é (Shakura & Sunyaev 1973):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = g_z = -\frac{GMz}{r^3} \quad (\text{B.16})$$

A equação que nos dá a taxa dissipação de energia no disco por unidade de área, ao longo da direcção vertical,  $q(z)$ , pode ser escrita como (Shakura & Sunyaev 1973):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dq}{dz} = \frac{Q}{\Sigma} \quad (\text{B.17})$$

onde  $Q$ , dado por (B.14), corresponde à taxa de dissipação (total) de energia por unidade de área no disco. Integrando resulta:

$$q(z) = Q \frac{u(z)}{\Sigma}$$

onde:

$$u(z) = \int_0^z \rho(z) dz$$

A função  $q(z)$  dá a taxa de dissipação de energia por unidade de área entre o plano do disco ( $z=0$ ) e o ponto  $z<h$ , contabilizando para isso as duas faces do disco. Note-se que para  $z = h$  temos  $q = Q$ .

Se às equações (B.16) e (B.17) juntarmos a equação da transferência radiativa (Shakura & Sunyaev 1973):

$$\frac{c}{3\sigma\rho} \frac{d\varepsilon_r}{dz} = -q(z)$$

onde  $\varepsilon_r$  é a densidade de energia,  $\sigma$  é a opacidade e  $\rho$  a densidade de matéria; então temos um sistema fechado de equações, cuja solução determina a distribuição vertical das várias quantidades físicas no disco.

Nas regiões  $a$  e  $b$ , a opacidade é dominada pela dispersão electrónica. Nesse caso o estado termodinâmico do gás pode ser descrito, em qualquer ponto e em qualquer

instante, por apenas dois parâmetros: temperatura e densidade. Vamos supor também que o disco é bastante opaco e que, portanto, a sua temperatura central  $T_c$  é muito superior à sua temperatura superficial  $T_s$ . No cenário criado por estas duas suposições é possível derivar a seguinte expressão para a temperatura (Shakura & Sunyaev 1973):

$$T(u) = T_c \left[ 1 - 4 \left( \frac{u}{\Sigma} \right)^2 \right]^{1/4} \quad (\text{B.18})$$

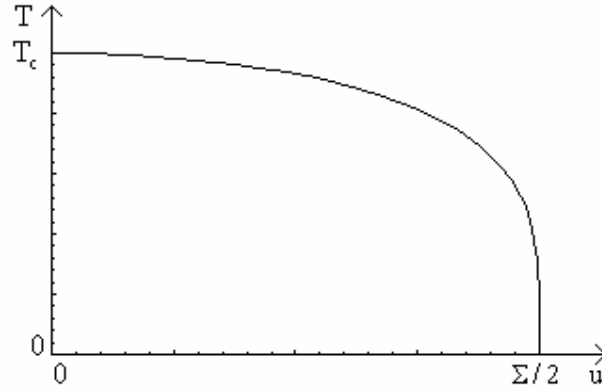
A curva característica para a variação da temperatura descrita por (B.18) está representada na Figura B.4. Note-se que a temperatura não varia muito quando  $2u \ll \Sigma$ . A estrutura do disco pode assim ser caracterizada por uma temperatura central  $T_c$  que depende apenas da coordenada radial  $r$ , sendo a dependência de  $z$  ignorada. Contudo, se o objectivo for o estudo do espectro de radiação emitido, a partir da superfície do disco, então não se pode desprezar a dependência de  $z$ , pois o espectro é fortemente dependente da distribuição vertical da densidade e da temperatura.

## B.11 Espectro emitido

A maior parte da energia é radiada principalmente perto do plano central do disco. Esta radiação não é acessível em termos de observação directa. O espectro de radiação observável forma-se na superfície do disco. Este espectro depende da distância ao buraco negro e da distribuição de matéria segundo a perpendicular ao plano do disco. O tipo de espectro emitido depende também da zona do disco.

Nas regiões mais exteriores, onde os processos livre-livre e livre-ligado (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983) são os principais responsáveis pela opacidade, forma-se um espectro Planckiano (Shakura & Sunyaev 1973):

$$F(x) = \frac{2\pi h}{c^2} \left( \frac{kT_s}{h} \right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \text{com } x = \frac{h\nu}{kT}$$



**Figura B.4** - Variação da temperatura do disco ao longo da vertical em função do integral da densidade  $u$ . Quando  $u=0$  estamos sobre o plano central do disco ( $z=0$ ) e  $T=T_c$ .

A este espectro corresponde um fluxo de energia dado por (Shakura & Sunyaev 1973):

$$Q = \int F(x) dx = \frac{c}{4} b T_s^4 \quad (\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

onde  $b$  é a constante da densidade de radiação.

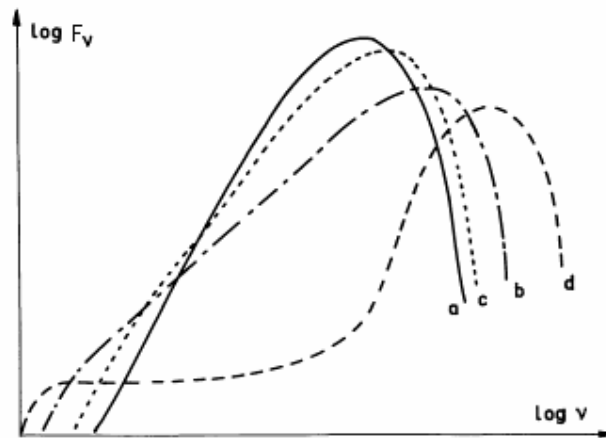
Na região intermédia do disco, onde a dispersão de Thomson (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983) domina a opacidade, o espectro emitido obedece, no caso de o disco poder ser considerado como um meio homogéneo com uma fronteira abrupta, à seguinte distribuição (Shakura & Sunyaev 1973):

$$F(x) = \text{const} \sqrt{n} T_s^{5/4} \frac{x^{3/2} e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$$

onde  $n$  corresponde à densidade bariónica local. O fluxo de energia é, neste caso, dado por:

$$Q = 1.8 \times 10^{-4} \sqrt{n} T_s^{2.25} \quad (\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

Na região mais interior do disco o processo de Comptonização (e.g. Shapiro & Teukolsky 1983) afecta fortemente a forma do espectro emitido. Este obedece a uma distribuição de Wien com (Shakura & Sunyaev 1973):



**Figura B.5** - Espectro local formado na superfície de um disco de acreção de matéria para um buraco negro: a) espectro Planckiano ( $Q = \text{const} \times T^4$ ); b) espectro de radiação de um meio homogêneo cuja maior contribuição vem da dispersão eletrônica ( $Q = \text{const} \times n^{1/2} T^{2.25}$ ); c) igual ao caso b mas com o meio consistindo numa atmosfera isotérmica exponencial ( $Q = \text{const} \times T^{2.5}$ ) e d) espectro resultante da Comptonização ( $Q = \text{const} \times T^4$ ). As intensidades estão normalizadas por forma a que Q seja o mesmo nos quatro casos apresentados (adaptado de Shakura & Sunyaev 1973).

$$F(x) = \text{const } x^3 e^{-x}$$

e:

$$Q = \frac{cd(r)}{4} T_s^4 \quad \text{com } d(r) \ll b$$

Na Figura B.5 indicam-se as curvas correspondentes aos vários espectros referidos anteriormente.

## B.12 Espectro integral da radiação emitida

A distribuição espectral da radiação emitida na totalidade pelo disco obtém-se integrando o espectro local ao longo de toda a superfície do disco (Shakura & Sunyaev 1973):

$$I_\nu = 4\pi \int_{r_I}^{r_E} F_\nu [T_s(r)] r dr$$

onde  $T_s(r)$  é uma função que nos dá a temperatura superficial do disco em função do raio. Os valores  $r_E$  e  $r_I$  correspondem aos limites interior e exterior do disco. Ao considerar o integral anterior devemos ter em mente que  $F_\nu$  varia consoante a região do disco e que  $T_s(r)$  depende da taxa de acreção e do parâmetro  $\alpha$  (Shakura & Sunyaev 1973).

Na Figura B.6 estão representadas algumas curvas de  $I_\nu$  em função de  $x(=hv/(kT))$ . Cada curva corresponde a uma dada taxa de acreção e a um valor do parâmetro  $\alpha$ . São apresentadas curvas para taxas de acreção críticas e subcríticas. A taxa de acreção de matéria diz-se crítica quando a perda total de energia pelo disco iguala a Luminosidade de Eddington:

$$L_E = 1.3 \times 10^{31} \frac{M}{M_\odot} \quad (\text{W})$$

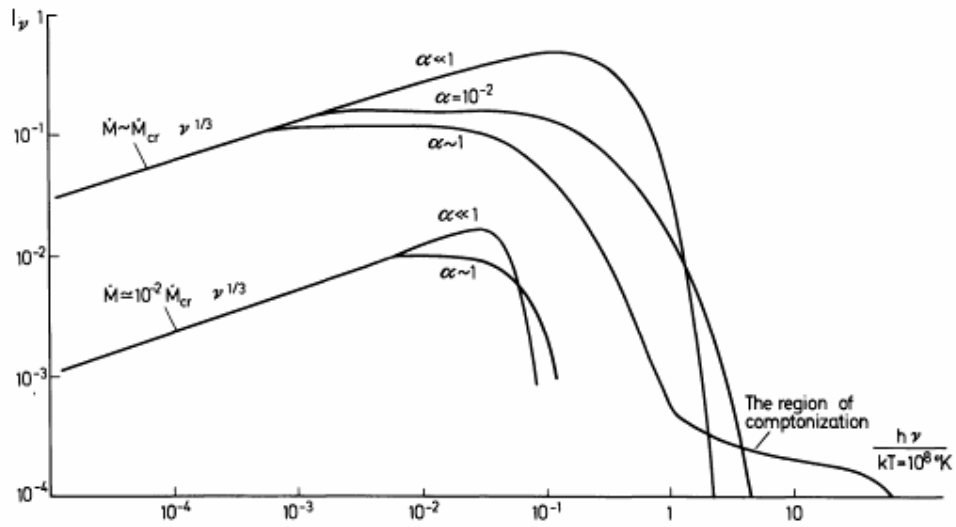
Na banda do óptico temos, para uma vasta gama de condições iniciais, um espectro da forma (Shakura & Sunyaev 1973):

$$I_\nu = \frac{16\pi^2 r_I^2 h}{c^2} \left( \frac{kT_I}{h} \right)^{8/3} \nu^{1/3}$$

A luminosidade óptica do disco é então dada por:

$$L_{\text{opt}} = \int_{\text{óptico}} I_\nu d\nu \approx 10^{28} M^{4/3} \left( \frac{dM}{dt} \right)^{2/3} \quad (\text{W}) \quad (\text{B.19})$$

Para um buraco negro de  $10M_\odot$  é de esperar uma luminosidade semelhante à do Sol mesmo que a taxa de acreção seja tão baixa quanto  $10^{-11} M_\odot \text{ ano}^{-1}$ . No entanto, nesse caso, não seria fácil fazer a distinção entre o buraco negro e uma estrela normal. A luminosidade óptica deverá, regra geral, ser superior ao valor dado por (B.19) em



**Figura B.6** - A radiação integral do disco para diferentes valores da taxa de acreção e do parâmetro  $\alpha$  (adaptado de Shakura & Sunyaev 1973).

virtude da reemissão, na banda do visível, por parte das regiões mais periféricas do disco das radiações mais energéticas provenientes das zonas mais interiores do disco (Shakura & Sunyaev 1973).